OPCIÓN A

1. a) Discuta para qué valores de **b** el sistema siguiente es compatible: **(7 puntos)**

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{cases}$$

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible indeterminado. **(3 puntos)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & b-1 & 1-b \\ 0 & b-2 & 2+b \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-1 & -(b-1) \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix} = (b-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix} = (b-1)\cdot(b+2+b-2)$$

$$|A| = 2b\,(b-1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2b\,(b-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$$\forall b \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow rang\ (A) = 3 = número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ b=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A/B) = 3 \neq rang\ (A) = 2 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ b=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A/B) = rang\ (A) = 2 < número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ b=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow -y+3z=-1 \Rightarrow y=1+3z \Rightarrow x+2\,(1+3z)-z=2 \Rightarrow x+2+6z-z=2 \Rightarrow$$

$$x=-5z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (-5\lambda\,,1+3\lambda\,,\,\lambda)$$

2. Calcular la ecuación general del plano que pasa por los puntos A, B y C **(4 puntos)**, siendo:
A: el simétrico del punto P (1 , 2 , 3) respecto del plano **x = z**. **(3 puntos)**
B: la proyección ortogonal del punto Q **(2 , 1 , 3)** sobre el plano **z = 0 (3 puntos)**
C: el origen de coordenadas.

Para buscar el punto A y el punto B, hallaremos, una recta, en cada caso, que denominaremos r y s, perpendiculares a los planos α y β que se determinan en el problema, que tendrá como vector director los de los planos dados, y contendrán al punto P y Q, respectivamente.
Hallaremos los puntos de intersección de dichas rectas con los planos respectivos obteniendo el punto D, en el primer caso, que es el punto medio entre P y su simétrico A, y, en el segundo caso el punto B pedido.
Los vectores AB, AC y AG, siendo G el punto genérico del plano buscado π, son coplanarios (pertenecen al mismo plano) siendo su producto mixto (que nos daría el volumen del paralelepípedo que forman) nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\alpha \equiv x - z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} = (1\,,0\,,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 200 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción\ con\ \alpha \Rightarrow 1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0$$

$$2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow D\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 2 \\ z = 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow D(3\,,2\,,2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{1 + x_A}{2} \Rightarrow 1 + x_A = 6 \Rightarrow x_A = 5 \\ 2 = \dfrac{2 + y_A}{2} \Rightarrow 2 + y_A = 4 \Rightarrow y_A = 2 \Rightarrow A(5\,,2\,,1) \\ 2 = \dfrac{3 + z_A}{2} \Rightarrow 3 + z_A = 4 \Rightarrow z_A = 1 \end{cases}$$

$$\beta \equiv z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} = (0\,,0\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 + \mu \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción\ con\ \alpha \Rightarrow 3 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -3$$

$$B\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 + (-3) \end{cases} \Rightarrow B(2\,,1\,,0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\,,1\,,0) - (5\,,2\,,1) = (-3\,,-1\,,-1) \equiv (3\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0\,,0\,,0) - (5\,,2\,,1) = (-5\,,-2\,,-1) \equiv (5\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (5\,,2\,,1) = (x-5\,,y-2\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-5) + 5\,(y-2) + 6\,(z-1) - 5\,(z-1) - 2\,(x-5) - 3\,(y-2) = 0 \Rightarrow -(x-5) + 2\,(y-2) + (z-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\pi \equiv x - 2y - z = 0$$

3. Sea f (x) = e^x cos x definida en el intervalo (0, 2 π).
a) Calcular y determinar los extremos de f (x). **(6 puntos)**
b) Calcular y determinar los puntos de inflexión de f (x). **(4 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x sen\ x=e^x(\cos x-sen\ x)\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ \cos x-sen\ x=0\end{cases}\Rightarrow\cos x-sen\ x=0\Rightarrow sen\ x=\cos x\Rightarrow\frac{sen\ x}{\cos x}=1\Rightarrow$$

$$tag\ x=1\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\\ k=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}k\in Z\Rightarrow$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-sen\ x)+e^x(-senx-\cos x)=e^x(\cos x-sen\ x-senx-\cos x)=-2e^x sen\ x$$

$$\begin{cases}f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2e^x sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2e^x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}e^x\Rightarrow M\acute{a}ximo\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)\\ f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-2e^x sen\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-2e^x\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}e^x\Rightarrow M\acute{i}nimo\Rightarrow f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=e^{\frac{5\pi}{4}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}\right)\end{cases}$$

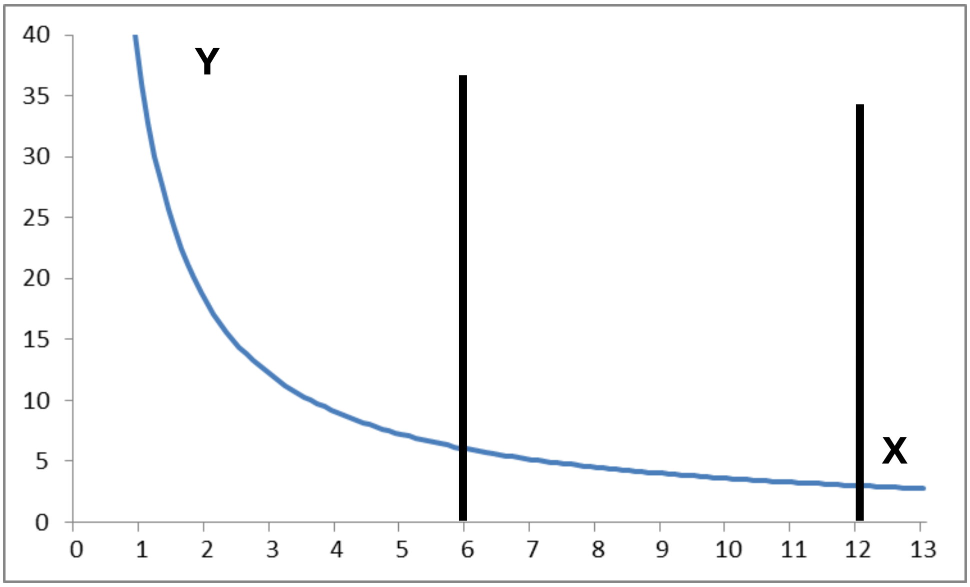
$b)$

$$f''(x)=0\Rightarrow-2e^x sen\ x=0\Rightarrow\begin{cases}e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ sen\ x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=0+k\pi\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow x=0\\ k=1\Rightarrow x=\pi\end{cases},k\in Z$$

$$f'''(x)=-2\left(e^x sen\ x+e^x\cos x\right)=-2e^x\left(sen\ x+\cos x\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f'''(0)=-2e^0\left(sen\ 0+\cos 0\right)=-2\cdot1\cdot(0+1)=-2\neq0\Rightarrow Punto\ de\ \inf lexi\acute{o}n\Rightarrow f(0)=e^0\cos 0=1\\ f'''(\pi)=-2e^\pi\left(sen\ \pi+\cos\pi\right)=-2\cdot e^\pi\cdot(0-1)=2e^\pi\neq0\Rightarrow Punto\ de\ \inf lexi\acute{o}n\Rightarrow f(\pi)=e^\pi\cos\pi=-e^\pi\end{cases}$$

4. Haga un dibujo del recinto limitado por la curva **x . y = 36,** el eje **OX** y las rectas verticales **x = 6** y **x = 12 (4 puntos)** Calcular el área de este recinto. **(6 puntos)**



Continuación del Problema 4 de la opción A

$$\int_6^{12} \frac{x}{36}\,dx = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_6^{12} = \frac{1}{72}\cdot\left(12^2-6^2\right) = \frac{1}{72}\cdot\left(144-36\right) = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}u^2$$

OPCIÓN B

1.- a) Discutir para qué valores de **a** el sistema siguiente es compatible: $\left\{\begin{array}{l} ax+2y+z=1 \\ 2x-2y=0 \\ ax+y-z=1 \end{array}\right.$ **(7 puntos)**

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible. **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2a & 3 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(3+2a)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 2\cdot(3+2a)=0$$

$$3+2a=0\Rightarrow 2a=-3\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{-\frac{3}{2}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a=-\frac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A/B)=3\neq rang(A)=2$$

Sistema Incompatible

b)

*Cuando es Compatible Deter*min*ado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2a & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2a+3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow (2a+3)x=2\Rightarrow x=\frac{2}{2a+3}\Rightarrow\frac{2}{2a+3}-y=0\Rightarrow$$

$$y=\frac{2}{2a+3}\Rightarrow a\cdot\frac{2}{2a+3}+2\cdot\frac{2}{2a+3}+z=1\Rightarrow\frac{2a+4}{2a+3}+z=1\Rightarrow z=1-\frac{2a+4}{2a+3}=\frac{2a+3-2a-4}{2a+3}$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{2}{2a+3},\frac{2}{2a+3},-\frac{1}{2a+3}\right)$$

2. Encontrar los puntos **P** situados a distancia **5** del origen de coordenadas y que pertenecen a la recta r que pasa por los puntos **A (1 , 2 , 5)** y **B (6 , 5 , 6)**. **(10 puntos)**

El modulo del vector **OR**, siendo **O** el origen de coordenadas y **R** el punto genérico de la recta **r** determinada por el vector **AB** como vector director y uno cualquiera, de los dos puntos (tomaremos **A**), es igual a **5**

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = (6\,,5\,,6) - (1\,,2\,,5) = (5\,,3\,,1) \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \Rightarrow \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1+5\lambda\,,2+3\lambda\,,5+\lambda) - (0\,,0\,,0) = (1+5\lambda\,,2+3\lambda\,,5+\lambda) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right| = \pm 5 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(1+5\lambda)^2 + (2+3\lambda)^2 + (5+\lambda)^2} = \pm 5 \Rightarrow 1 + 10\lambda + 25\lambda^2 + 4 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 25 + 10\lambda + \lambda^2 = 25$$

$$35\lambda^2 + 32\lambda + 30 = 25 \Rightarrow 35\lambda^2 + 32\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 32^2 - 4\cdot 35 \cdot 5 = 1024 - 700 = 324 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-32 \pm \sqrt{324}}{2\cdot 35} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-32+18}{70} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5} \\ \lambda = \frac{-32-18}{70} = -\frac{50}{70} = -\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \begin{cases} x = 1 + 5\cdot\frac{1}{5} \\ y = 2 + 3\cdot\frac{1}{5} \Rightarrow P\left(2\,,\frac{13}{5}\,,\frac{26}{5}\right) \\ z = 5 + \frac{1}{5} \end{cases} \\ P_2 \begin{cases} x = 1 + 5\cdot\left(-\frac{5}{7}\right) \\ y = 2 + 3\cdot\left(-\frac{5}{7}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{18}{7}\,,-\frac{1}{7}\,,\frac{30}{7}\right) \\ z = 5 + \left(-\frac{5}{7}\right) \end{cases} \end{cases}$$

3. a)

Calcular a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)^2 + a & si \quad \frac{3}{2} \le x \le 2 \\ bx^2 - 6x & si \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $\left[\frac{3}{2}\,,4\right]$ y derivable en el intervalo $\left(\frac{3}{2}\,,4\right)$ **(7 puntos)**

b) Para los valores de **a** y **b** determinados en el apartado a), calcular los puntos del intervalo **(1 , 4)** donde la pendiente de la recta tangente es **3**. **(3 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ln(2-1)^2 + a = \ln 1 + a = 0 + a = a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = b\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = 4b - 12 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow a = 4b - 12$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} & si \quad \frac{3}{2} < x < 2 \\ 2bx - 6 & si \quad 2 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{2}{2-1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2b\cdot 2 - 6 = 4b - 6 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} a - 4b = -12 \\ 4b - 6 = 2 \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 4\cdot 2 - 12 = -4$$

Continuación del Problema 3 de la opción B

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{x-1} & si \quad \dfrac{3}{2}<x<2\\ 4x-6 & si \quad 2<x<4\end{cases} \Rightarrow f'(x)=3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}=3\Rightarrow 2=3x-3\Rightarrow 3x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}\in(1\,,2)\\ 4x-6=3\Rightarrow 4x=9\Rightarrow x=\dfrac{9}{4}\in(2\,,4)\end{cases}$$

4.- Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$ **(10 puntos)**

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\Rightarrow A(x-1)+B=x\Rightarrow Derivando\Rightarrow A=1$$

$$x=1\Rightarrow A(1-1)+B=1\Rightarrow B=1\Rightarrow\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int\frac{x}{(x-1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}=\ln t+\int t^{-2}dt=\ln\,(x-1)+\frac{1}{-1}t^{-1}=\ln\,(x-1)-\frac{1}{x-1}+K$$

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt$$